Elementargeometrische Herstellung des Klein—Hilbertschen Kugelmodells des hyperbolischen Raumes.

Von PAUL SZÁSZ in Budapest.

In einer früheren Arbeit[1]) haben wir auf elementargeometrischem Wege bewiesen, daß der *Poincarésche Halbraum*[2]) ein Modell des hyperbolischen Raumes darstellt, wodurch ein elementargeometrischer Beweis für die Widerspruchsfreiheit der hyperbolischen Raumgeometrie erbracht wurde. In folgendem wollen wir für das bekannte *Klein—Hilbertsche Kugelmodell*[3]) dasselbe leisten. Dieses Modell kann mit Vermeidung des Begriffes der Kollineation in vollständig elementargeometrischer Form angegeben werden, wie folgt.

Es sei im euklidischen Raume eine Kugel σ als *Fundamentalkugel* vorgelegt. Die inneren Punkte dieser Kugel sollen *Pseudopunkte*, die im ihren Innern liegenden Teile der sie schneidenden Geraden bzw. Ebenen *Pseudogeraden*, resp. *Pseudoebenen* heißen. Als *Charakteristik einer Pseudostrecke* $\overline{P_1P_2}$ (d. h. einer Strecke, deren Endpunkte P_1 und P_2 Pseudopunkte sind) erklären wir das Doppelverhältnis

$$(\Xi \mathrm{H} P_2 P_1) = \frac{\Xi P_2}{P_2 \mathrm{H}} : \frac{\Xi P_1}{P_1 \mathrm{H}}$$

wobei Ξ, H die Schnittpunkte der Geraden P_1P_2 mit der Fundamentalkugel σ

---

1) PAUL SZÁSZ, Elementargeometrischer Beweis der Widerspruchsfreiheit der hyperbolischen Raumgeometrie mit Hilfe des Poincaréschen Halbraumes, *Acta Math. Academiae Scientiarum Hungaricae* (im Erscheinen).

2) Vgl. H. POINCARÉ, Mémoire sur les groupes kleinéens, *Acta Math.* (Stockholm), **3** (1883), 49—92, besonders 55—56, oder *Oeuvres,* tome II (Paris, 1916), 258—299, besonders 264—265.

3) F. KLEIN, Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, *Math. Annalen,* **4** (1871), 573—625, besonders 620—622, oder *Gesammelte mathematische Abhandlungen* I (Berlin, 1921), besonders 300—302; s. ferner D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie,* 7. Aufl. (Leipzig und Berlin, 1930), S. 38.

sind, so bezeichnet, daß P_2 zwischen P_1 und H liegt (Fig. 1). Zwei Pseudostrecken sollen einander *pseudokongruent* oder *pseudogleich* heißen, falls sie dieselbe Charakteristik haben. Wird die Fundamentalkugel σ von der Ebene eines *Pseudowinkels* $\sphericalangle (l, m)$ im Kreise k geschnitten und sind die Schnittpunkte von der Geraden l bzw. m mit k die Punkte Ξ und H, bzw. M und N, so sei der Winkel derjenigen Kreisbogen $\widehat{\Xi H}$ und $\widehat{MN}$ in dieser Ebene, die k rechtwinklig schneiden (Fig. 2), als die *Charakteristik dieses Pseudowinkels* erklärt werden. (Die Durchmesser von k sind dabei als ihn rechtwinklig schneidenden Kreisbogen mitgerechnet.) Dementsprechend sollen zwei Pseudowinkel von gleicher Charakteristik einander *pseudokongruent* oder *pseudogleich* heißen.

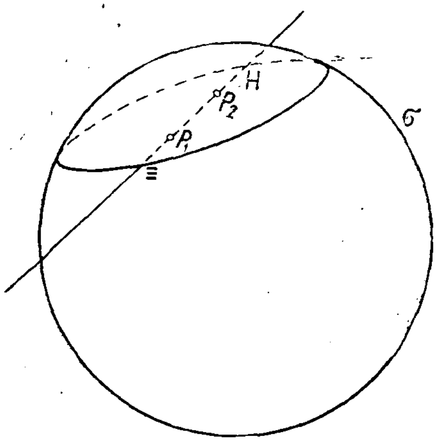

Fig. 1.

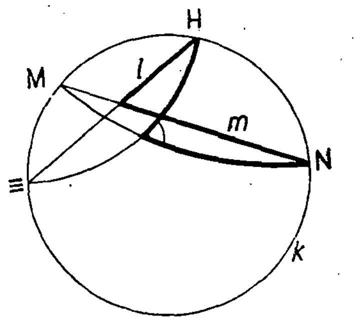

Fig. 2.

In der durch diese und durch die übrigen trivialen Festsetzungen erklärten *Pseudogeometrie* oder *Bildgeometrie* sind alle Axiome der hyperbolischen Raumgeometrie gültig, mit anderen Worten ist diese Pseudogeometrie in der Tat ein Modell (das Klein—Hilbertsche Kugelmodell) des hyperbolischen Raumes. Unsere gegenwärtige Aufgabe ist eben die Durchführung eines elementargeometrischen Beweises dieser Behauptung.[4]) Dabei sei als Axiomensystem der hyperbolischen Geometrie der Inbegriff folgender Axiome zugrunde gelegt werden: die Axiome der Verknüpfung, der Anordnung und der Kongruenz von D. Hilbert[5]), die Negation des euklidischen Parallelenaxioms, endlich das Archimedische Axiom und das Cantorsche Stetigkeitsaxiom.

---

[4]) Zum Beispiel im schönen Buche von G. Verriest, *Introduction à la géométrie non euclidienne par la méthode élémentaire* (referiert in diesen *Acta*, **14** (1952), 277—278) vermißt man eben einen derartigen Beweis für die Widerspruchsfreiheit der hyperbolischen Geometrie.

[5]) D. Hilbert, a. a. O. [3]), S. 3—14.

Wir können uns auf den Beweis der Kongruenzaxiome III_4 und III_5 [6]) beschränken, da das bestehen aller übrigen Axiome unmittelbar einleuchtet. Zu beweisen sind also für die obige Pseudogeometrie die beiden nachstehenden Sätze.

III_4. *Es sei in einer Pseudoebene α ein Pseudohalbstrahl l sowie eine bestimmte Seite der l enthaltenden Pseudogeraden gegeben. Dann gibt es zu jedem gegebenen Pseudowinkel einen und nur einen Pseudohalbstrahl m in der Pseudoebene α, so daß der gegebene Pseudowinkel pseudokongruent dem Pseudowinkel $\sphericalangle(l, m)$ ist und zugleich alle inneren Pseudopunkte des Pseudowinkels $\sphericalangle(l, m)$ auf der gegebenen Seite der l enthaltenden Pseudogeraden liegen.* (Der Zusatz, laut welchem jeder Pseudowinkel sich selbst pseudokongruent ausfällt, ist trivial, auf Grund der Erklärung der Pseudokongruenz).

III_5. *Wenn für zwei Pseudodreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ die Pseudokongruenzen*

$$\overline{AB} \equiv \overline{A_1B_1}, \quad \overline{AC} \equiv \overline{A_1C_1}, \quad \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B_1A_1C_1 \tag{1}$$

gelten, so ist auch stets die Pseudokongruenz

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A_1B_1C_1 \tag{2}$$

erfüllt.

Zum Beweise dieser Sätze schicken wir drei elementargeometrische Hilfssätze [7]) voran, die wir an dieser Stelle auch elementargeometrisch beweisen-

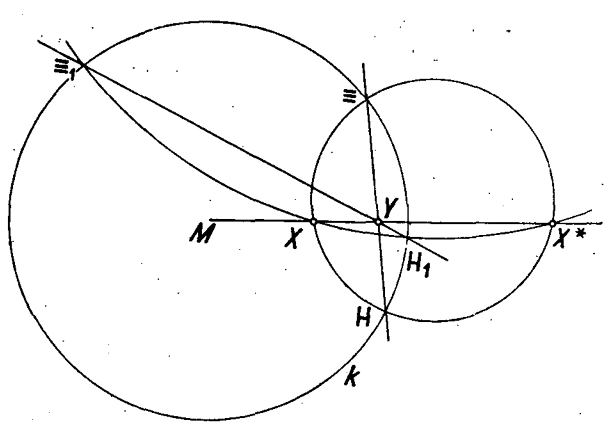

Fig. 3.

[6]) D. Hilbert, a. a. O. [3]), S. 13—14.

[7]) Vgl. Paul Szász, Über die Trigonometrie des Poincaréschen Kreismodells der hyperbolischen ebenen Geometrie, *Acta Math. Academiae Scientiarum Hungaricae*, **5 (1954)**, 29—34, besonders 31—33, wobei die Hilfssätze 1 und 2 angeführt und auf trigonometrischem Wege bewiesen sind.

Hilfssatz 1. *Ist X ein vom Mittelpunkt M verschiedener Punkt im Innern eines Kreises k und wird durch X ein Kreis gelegt der k in den Punkten Ξ, H rechtwinklig schneidet, so ist der Schnittpunkt Y der Geraden $\Xi\mathrm{H}$, MX von der Wahl des durch X gelegten Kreises unabhängig.*

Dieser Hilfssatz ist eine Folge des bekannten Satzes, laut welchem die Potenzlinien dreier Kreise sich in einem Punkte schneiden. Die durch X gelegten und zu k orthogonalen Kreise haben nämlich auch denjenigen Punkt X^* der Geraden MX gemein, der in Bezug auf k zu X invers ist (Fig. 3).

Hilfssatz 2. *Ist auf einem Kreise der Bogen $\widehat{\Xi\mathrm{H}}$ kleiner als der Halbkreis und bezeichnet M den Schnittpunkt der in Ξ bzw. H an den Kreis gelegten Tangenten, so ist bei beliebiger Wahl des Zwischenpunktes X auf $\widehat{\Xi\mathrm{H}}$ für den Schnittpunkt Y der Geraden $\Xi\mathrm{H}$, MX stets*

$$\left(\frac{\Xi X}{X\mathrm{H}}\right)^2=\frac{\Xi Y}{Y\mathrm{H}}. \tag{3}$$

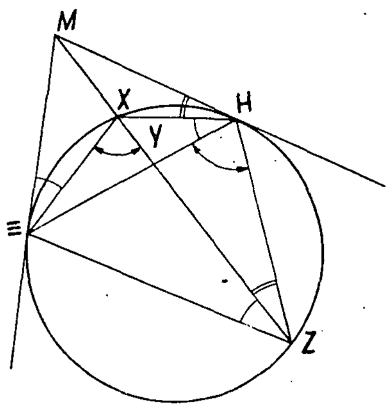

Fig. 4.

Zur Herleitung dieser Formel bezeichne Z den anderen Schnittpunkt des Kreises mit der Geraden MX (Fig. 4). Da bekanntlich $\sphericalangle X\Xi M=\sphericalangle XZ\Xi$ und ebenso $\sphericalangle X\mathrm{H}M=\sphericalangle XZ\mathrm{H}$ ausfällt, so ist $\triangle M\Xi X\sim\triangle MZ\Xi$ bzw. $\triangle M\mathrm{H}X\sim\triangle MZ\mathrm{H}$, also

$$\frac{\Xi X}{MX}=\frac{Z\Xi}{M\Xi},\quad \frac{X\mathrm{H}}{MX}=\frac{\mathrm{H}Z}{M\mathrm{H}},$$

woraus mit Rücksicht auf $M\Xi=M\mathrm{H}$ folgt

$$\frac{\Xi X}{X\mathrm{H}}=\frac{Z\Xi}{\mathrm{H}Z}. \tag{4}$$

Weiter ist als Peripheriewinkel $\sphericalangle\Xi\mathrm{H}X=\sphericalangle\Xi ZX$ und in ähnlicher Weise $\sphericalangle\Xi\mathrm{H}Z=\sphericalangle\Xi XZ$, also $\triangle X\mathrm{H}Y\sim\triangle\Xi ZY$, bzw. $\triangle\mathrm{H}ZY\sim\triangle X\Xi Y$, und somit

$$\frac{XY}{X\mathrm{H}}=\frac{\Xi Y}{Z\Xi},\quad \frac{XY}{X\Xi}=\frac{\mathrm{H}Y}{\mathrm{H}Z},$$

woher

$$\frac{X\Xi}{X\mathrm{H}}=\frac{\Xi Y}{\mathrm{H}Y}\,\frac{\mathrm{H}Z}{Z\Xi}. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt (3) durch Multiplikation.

Hilfssatz 3. *Ist X ein vom Mittelpunkt M verschiedener Punkt im Innern des Kreises k und sind Ξ_0, H_0 die Schnittpunkte der Geraden MX mit k, so bezeichnet, daß X zwischen M und H_0 liegt, so gilt für den durch Hilfs-*

satz 1 bestimmten Punkt Y der Formel (3) *entsprechend*

$$\left(\frac{\Xi_0 X}{X\mathrm{H}_0}\right)^2 = \frac{\Xi_0 Y}{Y\mathrm{H}_0}. \tag{6}$$

Zum Beweise legen wir durch X denjenigen Kreis $\bar{k}$, der zu k orthogonal ist und die Gerade MX zu Symmetrieachse hat (Fig. 5). Sind Ξ, H die Schnittpunkte von k und $\bar{k}$, so ist der Schnittpunkt der Geraden MX und

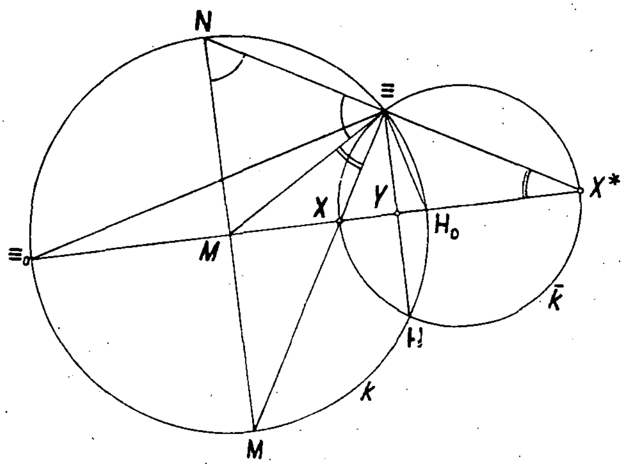

Fig. 5.

$\Xi\mathrm{H}$ der betrachtete Punkt Y. Es sei X^* der zweite Schnittpunkt von MX und $\bar{k}$ (d. h. der zu X inverse Punkt in Bezug auf k). Bezeichnet M bzw. N den zweiten Schnittpunkt von k mit ΞX resp. ΞX^*, so ist MN ein Durchmesser von k, da doch nach dem Satze des Thales $\sphericalangle X \Xi X^* = 90°$ ausfällt. Da weiter nach Voraussetzung $\bar{k}$ von $M\Xi$ berührt wird, so ist $\sphericalangle \mathrm{N} X^* M = \sphericalangle M \Xi X$, und infolge $M\Xi = M\mathrm{N}$ ist $\sphericalangle M\mathrm{N}\Xi = \sphericalangle M\Xi\mathrm{N}$. Es ist aber $\sphericalangle M\Xi X + \sphericalangle M\Xi\mathrm{N} = 90°$, also zugleich $\sphericalangle \mathrm{N}X^*M + \sphericalangle M\mathrm{N}\Xi = 90°$, folglich is $\sphericalangle X^* M\mathrm{N} = 90°$. Infolgedessen wird der Bogen $\widehat{\Xi_0 \mathrm{M} \mathrm{H}_0}$ von M halbiert und somit ist $\Xi\mathrm{M}$ die Winkelhalbierende von $\sphericalangle \Xi_0 \Xi \mathrm{H}_0$, also bekanntlich

$$\frac{\Xi_0 X}{X\mathrm{H}_0} = \frac{\Xi_0 \Xi}{\Xi \mathrm{H}_0}. \tag{7}$$

Wegen $\Xi Y \perp \Xi_0 \mathrm{H}_0$ ist aber

$$\Xi_0\Xi^2 = \Xi_0 Y \cdot \Xi_0 \mathrm{H}_0, \quad \Xi\mathrm{H}_0^2 = Y\mathrm{H}_0 \cdot \Xi_0\mathrm{H}_0,$$

also hat (7) die Formel (6) zur Folge.

Nun kann Satz III$_4$ aus Hilfssatz 1 gleich gefolgert werden. Es werde nämlich die Fundamentalkugel σ von der Ebene der Pseudoebene α in dem

Kreis k mit dem Mittelpunkt M geschnitten, bezeichne Y den Anfangspunkt des Pseudohalbstrahls l und es seien Ξ, H die Schnittpunkte der l enthaltenden Geraden mit k, wobei H den (nicht zugerechneten) Endpunkt von l bezeichnen soll, ferner sei X der Schnittpunkt von MY mit dem zu k orthogonalen Kreisbogen $\widehat{\Xi \mathrm{H}}$ (Fig. 6). Durch X kann ein ganz bestimmter Kreis gelegt werden, der k in M und N ebenfalls rechtwinklig schneidet und dessen Bogen $\widehat{X\mathrm{N}}$ mit $\widehat{X\mathrm{H}}$ nach der gegebenen Seite der Pseudogeraden ΞH hin dem Charakteristik des gegebenen Pseudowinkels gleichen Winkel bildet. Nach Hilfsatz 1 geht die Gerade MN durch den Punkt Y, also hat der von der Strecke YN (N ausgenommen) representierte Pseudohalbstrahl m und nur dieser, die verlangte Eigenschaft. Damit ist Satz III_4 bewiesen.

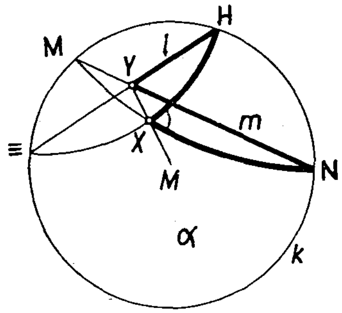

Fig. 6.

Wenden wir uns jetzt dem Beweise des Satzes III_5 zu. Es werde die Fundamentalkugel σ von der Ebene des Pseudodreiecks ABC im Kreise k

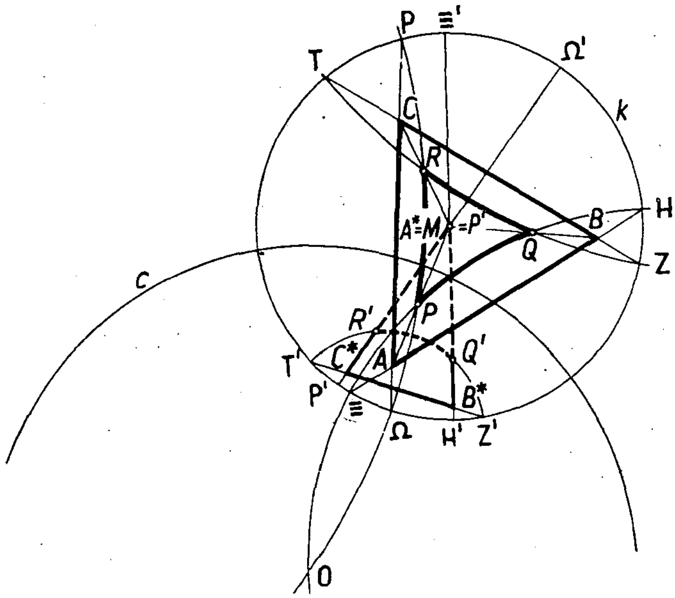

Fig. 7.

mit dem Mittelpunkt M geschnitten und es seien Ξ, H die Schnittpunkte der Geraden AB, Z, T die von BC, endlich P, Ω die von CA mit k, so bezeichnet, daß B zwischen A und H, C zwischen B und T, A zwischen C und Ω liegt (Fig. 7). Konstruiert man die zu k orthogonalen Kreisbogen $\widehat{\Xi\mathrm{H}}$, $\widehat{\mathrm{ZT}}$, $\widehat{\mathrm{P}\Omega}$, so liegt im Sinne des Hilfssatzes 1 der Schnittpunkt P von $\widehat{\Xi \mathrm{H}}$ und $\widehat{\mathrm{P}\Omega}$ auf der Geraden MA, der Schnittpunkt Q von $\widehat{\Xi \mathrm{H}}$ und $\widehat{\mathrm{Z}\mathrm{T}}$ auf MB, endlich der Schnittpunkt R von $\widehat{\mathrm{Z}\mathrm{T}}$ und $\widehat{\mathrm{P}\Omega}$ auf MC. Ist P von M verschieden (was dann und nur dann der Fall ist, wenn schon $A \neq M$ ausfällt), so ist $M = P'$ der Spiegelpunkt von P in Bezug auf einen bestimmten, zu k orthogonalen Kreis c, dessen Mittelpunkt mit O bezeichnet sein möge.[8]) Es seien die inversen Figuren der Bogen $\widehat{\Xi \mathrm{H}}$, $\widehat{\mathrm{Z}\mathrm{T}}$, $\widehat{\mathrm{P}\Omega}$ in Bezug auf c der Reihe nach die Bogen $\widehat{\Xi'\mathrm{H}'}$, $\widehat{\mathrm{Z}'\mathrm{T}'}$, $\widehat{\mathrm{P}'\Omega'}$ (unter deren $\widehat{\Xi'\mathrm{H}'}$ und $\widehat{\mathrm{P}'\Omega'}$ in Durchmesser von k ausarten, da doch den Bogen $\widehat{\Xi \mathrm{H}}$ bzw. $\widehat{\mathrm{P}\Omega}$ enthaltender Kreis offenbar durch das Inversionszentrum O geht und P bei dieser Inversion in M übergeführt wird). Ferner sei die inverse Figur des Kreisbogendreiecks PQR das Kreisbogendreieck $P'Q'R'$ (wobei also $P' = M$ ist). Wird der Punkt $M = P'$ anderer Weise mit A^*, der Schnittpunkt von MQ' und $\mathrm{Z}'\mathrm{T}'$ mit B^*, der von MR' und $\mathrm{Z}'\mathrm{T}'$ mit C^* bezeichnet, so sind die Pseudodreiecke ABC und $A^*B^*C^*$ einander pseudokongruent! Das sieht man so ein. Infolge des Hilfssatzes 2 ist

$$(\Xi \mathrm{H} B A) = (\Xi \mathrm{H} Q P)^2 \tag{8}$$

und im Sinne des Hilfssatzes 3 ist

$$(\Xi' \mathrm{H}' B^* A^*) = (\Xi' \mathrm{H}' Q' P')^2. \tag{9}$$

Da aber $\Xi', \mathrm{H}', P', Q'$ die Spiegelpunkte von Ξ, H, P, Q in Bezug auf den Kreis c sind, so ist auch

$$(\Xi \mathrm{H} Q P) = (\Xi' \mathrm{H}' Q' P').$$ [9])

(8) und (9) ziehen daher die Gleichung

$$(\Xi \mathrm{H} B A) = (\Xi' \mathrm{H}' B^* A^*)$$

[8]) Bezüglich dieses Kunstgriffes vgl. Howard Eves und V. E. Hoggatt, Hyperbolic trigonometry derived from the Poincaré model, *The American Math. Monthly*, **58** (1951), 469—474, besonders 470—471.

[9]) Der Beweis dieser bekannten Tatsache läßt sich elementargeometrisch so führen. Infolge der Inversion ist es offenbar $\triangle O\Xi P \sim \triangle OP'\Xi'$ und $\triangle O\mathrm{H}P \sim \triangle OP'\mathrm{H}'$, also

$$\frac{\Xi P}{P\mathrm{H}} = \frac{\Xi P}{OP}\,\frac{OP}{P\mathrm{H}} = \frac{\Xi' P'}{O\Xi'}\,\frac{O\mathrm{H}'}{P'\mathrm{H}'}.$$

Und da ähnlicher Weise $\triangle O\Xi Q \sim \triangle OQ'\Xi'$, $\triangle O\mathrm{H}Q \sim \triangle OQ'\mathrm{H}'$ ausfällt, so ist

$$\frac{\Xi Q}{Q\mathrm{H}} = \frac{\Xi Q}{OQ}\,\frac{OQ}{Q\mathrm{H}} = \frac{\Xi' Q'}{O\Xi'}\,\frac{O\mathrm{H}'}{Q'\mathrm{H}'}.$$

Durch Division ergibt sich daher

$$\frac{\Xi Q}{Q\mathrm{H}}\,\frac{P\mathrm{H}}{\Xi P} = \frac{\Xi' Q'}{Q'\mathrm{H}'}\,\frac{P'\mathrm{H}'}{\Xi' P'}$$

d. h.

$$(\Xi \mathrm{H} Q P) = (\Xi' \mathrm{H}' Q' P').$$

nach sich. Demnach besteht die Pseudokongruenz

$$\overline{AB} \equiv \overline{A^* B^*}.$$

In ähnlicher Weise ergibt sich auf Grund der Hilfssätze 2 und 3 die Pseudokongruenz

$$\overline{CA} = \overline{C^* A^*},$$

und durch Anwendung des Hilfssatzes 2

$$\overline{BC} = \overline{B^* C^*}.$$

Und da die Größe der Winkel von Kreisen (die Gerade als eine Ausartung des Kreises betrachtet) bei einer Inversion unverändert bleiben,[10]) so sind die Winkel des Kreisbogendreiecks PQR der Reihe nach gleich den Winkeln von $P'Q'R'$:

$$\sphericalangle P = \sphericalangle P', \quad \sphericalangle Q = \sphericalangle Q', \quad \sphericalangle R = \sphericalangle R'.$$

Das bedeutet aber für die Pseudodreiecke ABC und $A^*B^*C^*$, daß $\sphericalangle A$ und $\sphericalangle A^*$, $\sphericalangle B$ und $\sphericalangle B^*$, $\sphericalangle C$ und $\sphericalangle C^*$ der Reihe nach von gleicher Charakteristik sind, d. h. bestehen auch die Pseudokongruenzen

$$\sphericalangle A = \sphericalangle A^*, \quad \sphericalangle B = \sphericalangle B^*, \quad \sphericalangle C = \sphericalangle C^*.$$

Damit haben wir die Pseudokongruenz dieser Pseudodreiecke nachgewiesen. In derselben Weise entspricht dem Pseudodreieck $A_1B_1C_1$ ein ihm pseudokongruentes $A_1^*B_1^*C_1^*$, wobei $A_1^* = M_1$ der Mittelpunkt derjenigen Kreises k_1 ist, in dem die Fundamentalkugel σ von der Ebene $A_1B_1C_1$ geschnitten wird. Infolge der Voraussetzung (1) bestehen für die so hergestellten Pseudodreiecke $A^*B^*C^*$ und $A_1^*B_1^*C_1^*$ die Pseudokongruenzen

$$\overline{A^*B^*} \equiv \overline{A_1^*B_1^*}, \quad \overline{A^*C^*} \equiv \overline{A_1^*C_1^*}, \quad \sphericalangle B^*A^*C^* \equiv \sphericalangle B_1^*A_1^*C_1^*.$$

Da aber die Kreise einander ähnlich, um ihre Mittelpunkte in sich drehbar und in Bezug auf eine Gerade durch den Mittelpunkt symmetrisch sind, so folgt aus diesen Pseudokongruenzen offenbar die Pseudokongruenz

$$\sphericalangle A^*B^*C^* \equiv \sphericalangle A_1^*B_1^*C_1^*. \tag{10}$$

Andererseits gelten nach der Konstruktion die Pseudokongruenzen

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A^*B^*C^*, \quad \sphericalangle A_1B_1C_1 \equiv \sphericalangle A_1^*B_1^*C_1^*.$$

Aus (10) folgt demnach die Pseudokongruenz (2), was zu beweisen war.

Solchergestalt ist das Klein—Hilbertsche Kugelmodell des hyperbolischen Raumes (in der von uns gewählter Form) auf elementargeometrischem Wege hergestellt, und dadurch ein elementargeometrischer Beweis für die Widerspruchsfreiheit der hyperbolischen Raumgeometrie wieder erbracht. Wir meinen damit eine methodische Lücke ausgefüllt zu haben.

(Eingegangen am 1. Juli 1954.)

---

[10]) Siehe z. B. H. THIEME, *Die Elemente der Geometrie* (Leipzig und Berlin, 1909), § 30, besonders S. 121—122.